MATEMATIČKE METODE ZA ODREĐIVANJE JEDNAČINE KRIVE VODA U KOSOM RASPONU NA OSNOVU POZNATOG NAJVEĆEG UGIBA PARABOLE ZA ODABRANU TEMPERATURU

A. Hatibovics, EDF DÉMÁSZ Hálózat, Hungary

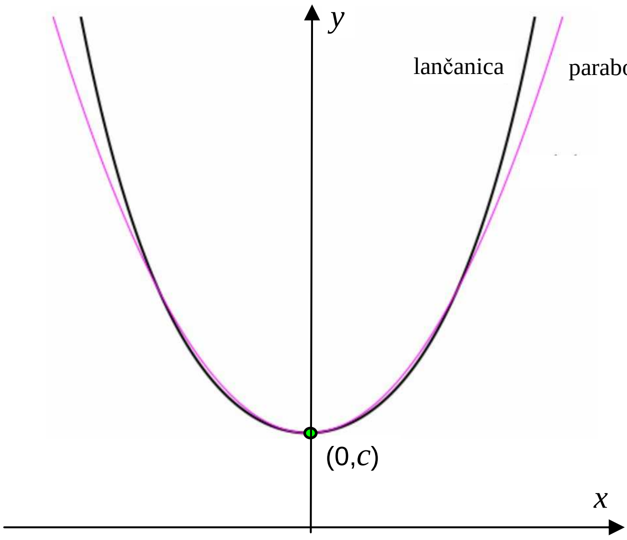
UVOD

Kriva voda je lančanica, tj. kriva funkcije hiperbolni cosinus, koja inače pripada grupi transcendentnih funkcija. S obzirom da je kriva parabole vrlo bliska krivoj lančanice pri projektovanju nadzemnih vodova lančanica se često aproksimira parabolom [1]. Parabola je kvadratna funkcija i pripada grupi algebarskih funkcija. Jedna od osnovnih matematičkih razlika između parabole i lančanice ogleda se u tome što je u slučaju parabole exponent stalan, dok je u slučaju lančanice promenjiv, tj. x kao promenjiva varijabla se nalazi u exponentu jednačine lančanice u exponencijalnom obliku.
Razlog za aproximaciju lančanice parabolom je vrlo jasan, znatno pojednostavljenje proračuna. To je sasvim opravdano jer je u velikom broju slučajeva odstupanje između lančanice i parabole neznatno, te se može zanemariti. U stranoj stručnoj literaturi za projektovanje nadzemnih vodova opšte je prihvaćena činjenica da se za raspone do oko 400 metara kriva voda može smatrati parabolom. Preko 400 metara se već preporučuje proračun prema modelu lančanice jer odstupanje između lančanice i parabole tada može biti znatno. Jedna od osnovnih razlika između lančanice i parabole je prisutna u kosom rasponu. Naime, dok je najveći ugib parabole uvek lociran na sredini raspona, dotle je najveći ugib lančanice u kosom rasponu blago pomeren prema višoj tački vešanja voda [2].
Za jednačinu parabole možemo napisati mnoštvo njenih varijacija, od kojih svaka ima specifičnu primenu. Nasuprot tome jednačina lančanice ima samo dve varijante, i to jednu u exponencijalnom obliku, a drugu u obliku *hiperbolni cosinus*. Nakon matematičkog aproximiranja lančanice parabolom, u radu je prikazano numeričko određivanje visinske razlike između parabole i lančanice za dva konkretna primera. U nastavku su prezentirane dve sasvim različite matematičke metode za određivanje jednačine krive voda na osnovu poznatog najvećeg ugiba parabole. Prva metoda se zasniva na upotrebi jednačine ugiba, dok druga metoda koristi tri poznate tačke voda.
Definisani su sledeći pojmovi: jednačina ugiba, jednačina spojnice, jednačina krive voda i najniža tačka voda. Detaljno su prikazani matematički algoritmi za njihovo određivanje na osnovu poznatog najvećeg ugiba parabole. To omogućava brzo i lako izračunavanje visine voda u bilo kojoj tački raspona, zatim ugiba u bilo kojoj tački voda ili pak koordinata najniže tačke voda, čak i za one koji se ne bave projektovanjem nadzemnih vodova. Crtanje krive voda je takođe vrlo jednostavno na osnovu prikazane jednačine krive voda.
S obzirom da je koordinatni početak (0;0) x-y koordinatnog sistema postavljen u podnožje levog stuba razmatranog raspona, jednačina voda ustvari predstavlja jednačinu visine voda u odnosu na x-osu koordinatnog sistema. Pored raspona a i visine tačaka vešanja voda h_1, h_2 kao neophodan ulazni podatak za proračun koristimo i najveći ugib voda f, a njegovu vrednost dobijemo provođenjem dobro poznatog, tzv. mehaničkog proračuna voda [3], [4]. (Mehanički proračun voda nije predmet ovog rada. Prikazani proračuni su isključivo matematičkog karaktera.)

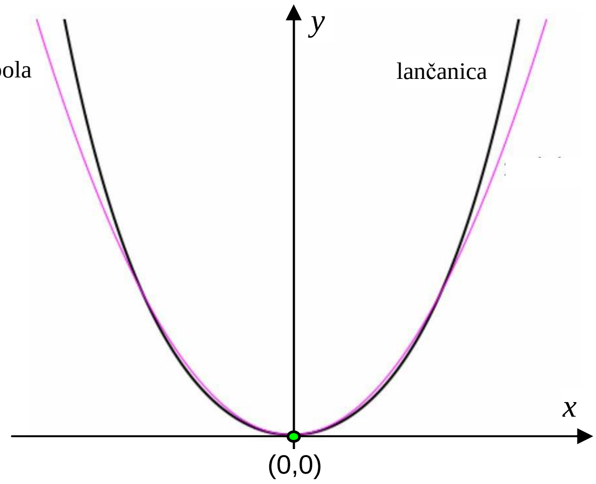
Alen Hatibovics, dipl.ing.el., EDF DÉMÁSZ Hálózat, Hungary
tel. +36-30/757-4163, E-mail: alen.hatibovics@edf.hu

APROKSIMACIJA LANČANICE PARABOLOM

Na slikama 1. i 2. zajedno su prikazane kriva lančanice i kriva parabole radi njihovog upoređenja.



Slika 1. Parabola i lančanica sa temenom u (0;c)



Slika 2. Parabola i lančanica sa temenom u (0;0)

Iako su krive lančanice i parabole vrlo slične njihove matematičke jednačine nemaju nikakve sličnosti. U sledećim redovima ćemo prikazati kako se lančanica (catenary) može aproksimirati parabolom. Polazimo od osnovne jednačine lančanice (1) i slike 1.

$$y_{lan} = c \cdot ch(x/c) \tag{1}$$

Teme krive je u tački (0;c), a c je parametar lančanice. Ako koordinatni početak (0;0) stavimo u teme lančanice (slika 2.), onda se prethodna jednačina menja u (2), a nakon razvijanja u red dobija oblik (3).

$$y_{lan} = c \cdot ch(x/c) - c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!c^{2n-1}} x^{2n} \tag{2}$$

$$y_{lan} = \frac{1}{2!c} x^2 + \frac{1}{4!c^3} x^4 + \frac{1}{6!c^5} x^6 + \frac{1}{8!c^7} x^8 + \frac{1}{10!c^9} x^{10} + \ldots + \frac{1}{(2n)!c^{2n-1}} x^{2n} + \ldots \tag{3}$$

$$y_{par} = \frac{1}{2c} x^2 = Ax^2 \tag{4}$$

Prvi član jednačine (3) ima najveću vrednost a svaki sledeći ima sve manju vrednost. Ako uzmemo u obzir samo prvi član a ostale zanemarimo, npr. jer je njihova vrednost isuviše mala, onda se radi o paraboli (4). $1/2c$ predstavlja A koeficijent parabole. Na ovaj način je lančanica aproksimirana parabolom. Ako koordinatni početak postavimo u podnožje levog stuba (visine h) raspona, onda jednačina lančanice u ravnom rasponu ima oblik (5). Ista jednačina ali u eksponencijalnom obliku je (6).

$$y_{lan} = c \cdot ch \frac{x - a/2}{c} - c + h - f \qquad x \in [0, a] \tag{5}$$

$$y_{lan} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-a/2}{c}} + e^{-\frac{x-a/2}{c}} \right) - c + h - f \qquad x \in [0, a] \tag{6}$$

Jednačine lančanice u kosom rasponu su (7) i (8). x_{MIN} i y_{MIN} su koordinate temena lančanice.

$$y_{lan} = c \cdot ch \frac{x - x_{MIN}}{c} - c + y_{MIN} \qquad x \in [0, a] \tag{7}$$

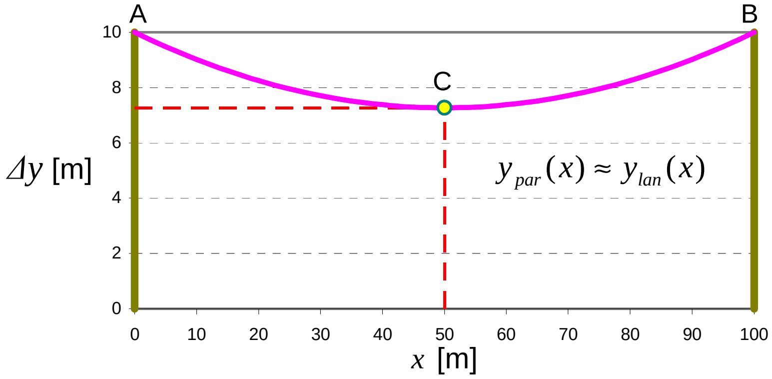
$$y_{lan} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_{MIN}}{c}} + e^{-\frac{x-x_{MIN}}{c}} \right) - c + y_{MIN} \qquad x \in [0, a] \tag{8}$$

Često se postavlja pitanje koliko je odstupanje između parabole i lančanice? Treba naglasiti da se to ne može izraziti algebarski, s obzirom da lančanica nije algebarska funkcija. Odstupanje između ove dve funkcije možemo izraziti samo numerički, i to za svaki konkretan slučaj posebno. U tom cilju su predstavljena dva primera ravnog raspona, jedan za 20 kV, a drugi za 120 kV. Namerno su izabrani rasponi sa velikim ugibom, jer je pri većem ugibu i odstupanje veće. Na osnovu tri poznate tačke (A, B i C) krive voda u ravnom rasponu prvo je određena jednačina parabole $y_{par}(x)$, a zatim lančanice $y_{lan}(x)$ sa istim najvećim ugibom f. Nakon toga je grafički predstavljena visinska razlika, tj. odstupanje između dvije krive $\Delta y(x) = y_{par}(x) - y_{lan}(x)$. U tačkama A, B, C odstupanje je jednako nuli, a maximalnu vrednost dostigne dva puta unutar raspona. Jasno se vidi da je maximalna vrednost odstupanja vrlo mala (reda milimetara), što opravdava upotrebu parabole pri projektovanju nadzemnih vodova. U kosom rasponu je maximalna vrednost odstupanja nešto veća.

Primer br. 1.

3x50 mm^2 BSZV
σ = 80 N/mm^2
a = 100 m
h = 10 m
t = 40 °C
f = 2,73 m

A(0; h) = A(0; 10)
B(a; h) = B(100; 10)
C(a/2; h–f) = C(50; 7,27)



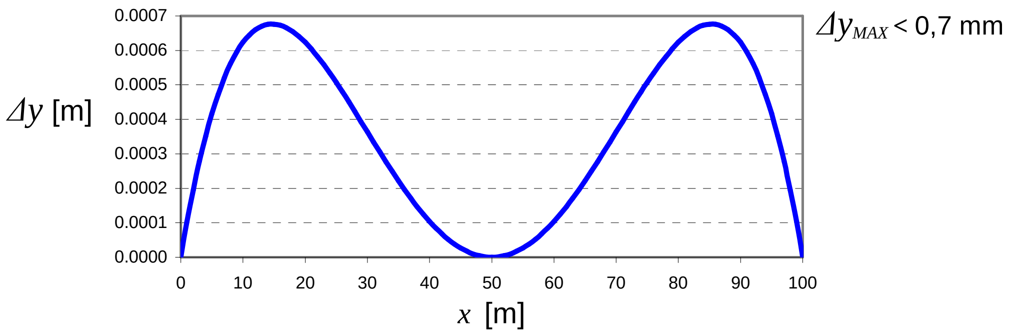
Slika 3. Ravni raspon (20 kV)

$$y_{par}(x) = 1092 \cdot 10^{-6} x^2 - 1092 \cdot 10^{-4} x + 10 \qquad x \in [0{,}100] \tag{9}$$

$$y_{lan}(x) = 458{,}3297 \cdot ch\frac{x-50}{458{,}3297} - 451{,}0597 \qquad x \in [0{,}100] \tag{10}$$

$$\Delta y(x) = y_{par}(x) - y_{lan}(x) \qquad x \in [0{,}100] \tag{11}$$

Dijagram na slici 4. predstavlja razliku jednačine parabole (9) i jednačine lančanice (10), tj. $\Delta y(x)$.

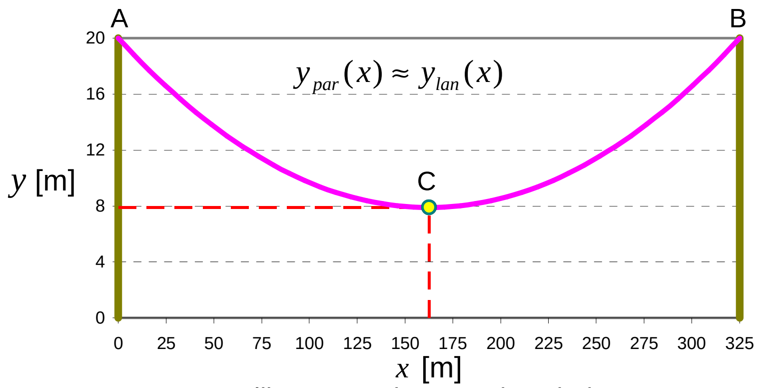


Slika 4. Visinska razlika između parabole i lančanice za primer br. 1.

Primer br. 2.

2x30x250/40 mm^2 ACSR
σ = 80 N/mm^2
a = 325 m
h = 20 m
t = 60 °C
f = 12,1 m

A(0; h) = A(0; 20)
B(a; h) = B(325; 20)
C(a/2; h–f) = C(162,5; 7,9)



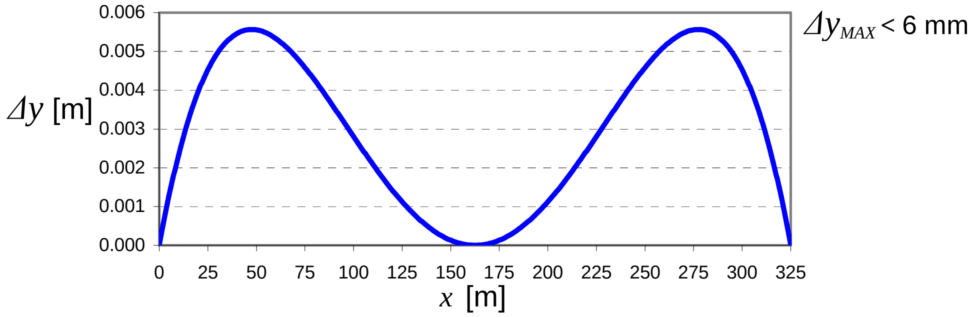
Slika 5. Ravni raspon (120 kV)

$$y_{par}(x) = 458 \cdot 10^{-6} x^2 - 148923 \cdot 10^{-6} x + 20 \qquad x \in [0{,}325] \tag{12}$$

$$y_{lan}(x) = 1093{,}17809 \cdot ch \frac{x - 162{,}5}{1093{,}17809} - 1085{,}27809 \qquad x \in [0{,}325] \tag{13}$$

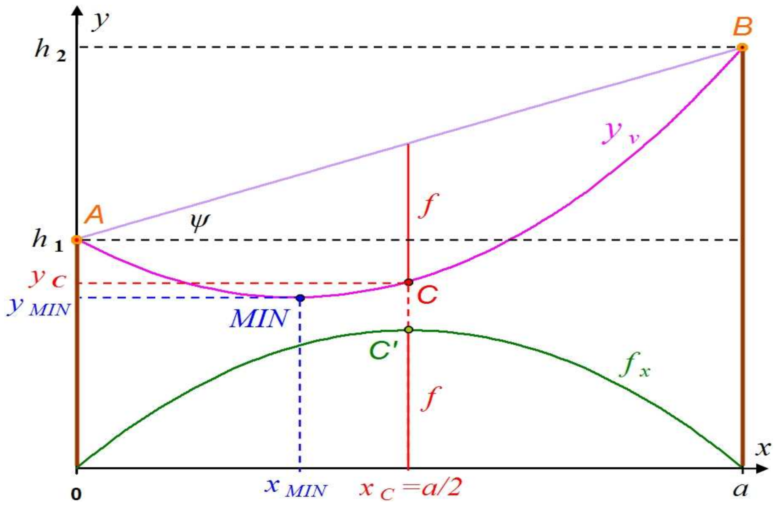
$$\Delta y(x) = y_{par}(x) - y_{lan}(x) \qquad x \in [0{,}325] \tag{14}$$

Dijagram na slici 6. predstavlja razliku jednačine parabole (12) i jednačine lančanice (13), tj. $\Delta y(x)$.



Slika 6. Visinska razlika između parabole i lančanice za primer br. 2.

ODREĐIVANJE JEDNAČINE KRIVE VODA NA OSNOVU JEDNAČINE UGIBA



Slika 7. Kriva voda u kosom rasponu

Oznake na slici 7.

a – raspon

h_1 – visina tačke vešanja voda na levom stubu raspona

h_2 – visina tačke vešanja voda na desnom stubu raspona

f – najveći ugib

MIN – najniža tačka voda

ψ – ugao nagiba raspona

y_v – kriva voda

f_x – kriva ugiba

Jednačina krive voda je razlika jednačine spojnice $y_s(x)$ i jednačine ugiba $f_x=f(x)$. Spojnica je linija koja spaja tačke vešanja voda, te je njena jednačina u segmentu $[0,a]$ jednačina prave (15) koja prolazi kroz tačke A(0;h_1) i B(a;h_2) na slici 7. Vertikalno rastojanje između spojnice i voda je ugib.

$$y_s = \frac{h_2 - h_1}{a} x + h_1 \qquad x \in [0, a] \tag{15}$$

Za jednačinu ugiba koristimo formulu (16), vrlo rasprostranjenu u mađarskoj stručnoj literaturi. Pomoću ove formule možemo izračunati ugib u bilo kojoj (x) tački raspona a.

$$f_x = f\left[1 - \left(\frac{a - 2x}{a}\right)^2\right] \qquad x \in [0, a] \tag{16}$$

U sledećem koraku treba oduzeti jednačinu (16) od (15) u cilju određivanja jednačine krive voda (17).

$$y_v = y_s - f_x = \frac{h_2 - h_1}{a} x + h_1 - f\left[1 - \left(\frac{a - 2x}{a}\right)^2\right] \qquad x \in [0, a] \tag{17}$$

Jednačina (17) je univerzalna, jer važi za obe vrste kosog raspona, tj. i za $h_1<h_2$ i za $h_1>h_2$, iako je izvedena na osnovu slučaja $h_1<h_2$, kao na slici 7. U ravnom rasponu jednačina (17) dobija jednostavniji oblik (18), s obzirom da je tada $h_1=h_2=h$.

$$y_v = h - f\left[1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2\right] \qquad x\in[0,a] \tag{18}$$

Znači (17) je glavna jednačina za krivu voda u kosom rasponu, a (18) se odnosi na specijalan slučaj kada su obe tačke vešanja voda u razmatranom rasponu na istoj visini.
Nakon sređivanja jednačine (17) dobijamo izraz (19), koji predstavlja univerzalnu jednačinu voda u osnovnom obliku parabole. Iz ove jednačine možemo izdvojiti koeficijente parabole A, B i C (20).

$$y_v = \frac{4f}{a^2}x^2 + \frac{h_2-h_1-4f}{a}x + h_1 \qquad x\in[0,a] \tag{19}$$

$$A=\frac{4f}{a^2} \qquad B=\frac{h_2-h_1-4f}{a} \qquad C=h_1 \tag{20}$$

U ravnom rasponu jednačina (19) ima jednostavniji oblik (21), jer je $h_1=h_2=h$.

$$y_v = \frac{4f}{a^2}x^2 - \frac{4f}{a}x + h \qquad x\in[0,a] \tag{21}$$

Koeficijent parabole A određuje njen oblik. Ako je $A>0$ onda je parabola okrenuta otvorom nagore, a ako je $A<0$ onda je parabola okrenuta otvorom nadole. Naravno ovde govorimo o tzv. vertikalnoj paraboli, jer u matematici postoji i vodoravna parabola. U slučaju krive voda je $A>0$, s obzirom da su a i f uvek pozitivni. Za razliku od krive voda kriva ugiba je parabola okrenuta otvorom nadole. Jednačina ugiba u osnovnom obliku jednačine parabole je jednačina (22), kod koje je $A<0$ i $C=0$.

$$f_x = -\frac{4f}{a^2}x^2 + \frac{4f}{a}x \qquad x\in[0,a] \tag{22}$$

Na slici 7. se jasno vidi da kriva ugiba ima maximum u tački $C'(a/2;\ f\ )$, te je na osnovu toga lako napisati kanonski oblik jednačine ugiba (23).

$$f_x = -\frac{4f}{a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + f \qquad x\in[0,a] \tag{23}$$

ODREĐIVANJE JEDNAČINE KRIVE VODA NA OSNOVU TRI POZNATE TAČKE VODA

Za razliku od prethodne metode za određivanje jednačine krive voda ova metoda ne zahteva niti prethodno određivanje jednačine spojnice, niti jednačine ugiba, nego samo poznavanje najvećeg ugiba voda f, pored osnovnih ulaznih podataka za proračun a, h_1 i h_2. Naime, iskoristićemo činjenicu da je najveći ugib parabole uvek lociran na sredini raspona, bilo da se radi o ravnom ili kosom rasponu. Znači $x_C=a/2$, a y koordinatu tačke C ćemo odrediti na sledeći način:

$$y_C = h_1 + \frac{h_2-h_1}{2} - f = \frac{2h_1}{2} + \frac{h_2}{2} - \frac{h_1}{2} - f = \frac{h_1+h_2}{2} - f \tag{24}$$

S obzirom da sada poznajemo tri tačke parabole, a to je dovoljan uslov za njeno definisanje, možemo napisati sistem od tri jednačine sa tri nepoznate prema osnovnoj jednačini parabole (25).

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{25}$$

$$h_1 = C \tag{26}$$

$$h_2 = Aa^2 + Ba + C \tag{27}$$

$$\frac{h_1+h_2}{2} - f = A\left(\frac{a}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a}{2}\right) + C \tag{28}$$

Rešenje ovog sistema [5], [6] algebarskih jednačina (26), (27), (28) su koeficijenti parabole A, B i C (20) koje treba uvrstiti u (25) u cilju određivanja krajnje jednačine krive voda (29).

$$y_v = \frac{4f}{a^2}x^2 + \frac{h_2 - h_1 - 4f}{a}x + h_1 \qquad x \in [0, a] \tag{29}$$

Dobili smo potpuno identičnu formulu kao u prethodnoj metodi što je sasvim dovoljan dokaz ispravnosti obe metode. Iz jednačine (29) možemo izvesti izraz za ravni raspon (21), ali to je već urađeno u prethodnoj metodi, te ne treba ponavljati.

TRANSFORMACIJA JEDNAČINE KRIVE VODA U KANONSKI OBLIK

Pored osnovnog oblika jednačine parabole (25) često se koristi i tzv. kanonski oblik (30). Pomoću izraza (31) jednačinu krive voda (29) možemo transformisati u njen kanonski oblik (34).

$$y = A(x - x_{MIN})^2 + y_{MIN} \tag{30}$$

$$y = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A} \tag{31}$$

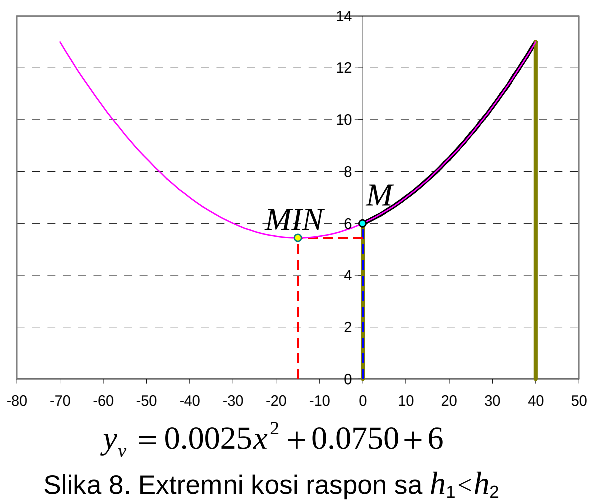
$$x_{MIN} = -\frac{B}{2A} = -\frac{\frac{h_2 - h_1 - 4f}{a}}{2\frac{4f}{a^2}} = \frac{-a(h_2 - h_1 - 4f)}{8f} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{h_2 - h_1}{4f}\right) \tag{32}$$

$$y_{MIN} = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\frac{4f}{a^2}h_1 - \left(\frac{h_2 - h_1 - 4f}{a}\right)^2}{4\frac{4f}{a^2}} = h_1 - f\left(1 - \frac{h_2 - h_1}{4f}\right)^2 \tag{33}$$

$$y_v = \frac{4f}{a^2}\left[x - \frac{a}{2}\left(1 - \frac{h_2 - h_1}{4f}\right)\right]^2 + h_1 - f\left(1 - \frac{h_2 - h_1}{4f}\right)^2 \qquad x \in [0, a] \tag{34}$$

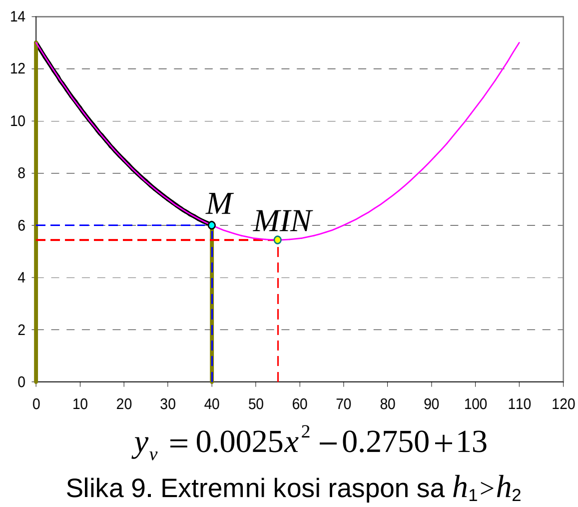
$$y_v = \frac{4f}{a^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h - f \qquad x \in [0, a] \tag{35}$$

(34) je kanonski oblik jednačine krive voda u kosom, a (35) u ravnom rasponu. (34) ima višestruku namenu. Npr. može se koristiti za određivanje najniže tačke krive voda [7], jer x_{MIN} i y_{MIN} su koordinate temena parabole. U većini slučajeva su najniža tačka voda i teme parabole jedna te ista tačka (kao na slici 7). U protivnom najniža tačka voda je identična sa nižom tačkom vešanja voda M. Dva konkretna primera takvih extremnih kosih raspona kod kojih $x_{MIN} \notin [0, a]$ su prikazana na slikama 8. i 9. (a=40m)



$$y_v = 0.0025x^2 + 0.0750 + 6$$

Slika 8. Extremni kosi raspon sa $h_1 < h_2$



$$y_v = 0.0025x^2 - 0.2750 + 13$$

Slika 9. Extremni kosi raspon sa $h_1 > h_2$

JEDNAČINA UGIBA I JEDNAČINA KRIVE VODA U ZAVISNOSTI OD PARAMETRA PARABOLE p

U cilju kompletne matematičke obrade jednačine ugiba i jednačine krive voda korisno je prikazati i njihove verzije u zavisnosti od parametra parabole p. Parametar parabole uvek ima pozitivnu vrednost. Poznavajući matematičku vezu (36) između parametra p i koeficijenta A, odnosno vezu između najvećeg ugiba f i parametra p, jednačine ugiba (22) i (23) dobijaju oblik (37) i (38), a jednačine voda (29), (34), (21) i (35) dobijaju oblik (39), (40), (41), odnosno (42).

$$p = \frac{1}{2|A|} \quad \Rightarrow \quad |A| = \frac{1}{2p} \quad \Rightarrow \quad \frac{4f}{a^2} = \frac{1}{2p} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{a^2}{8p} \tag{36}$$

1. Osnovni i kanonski oblik jednačine ugiba

$$f_x = -\frac{1}{2p}x^2 + \frac{a}{2p}x \qquad x \in [0,a] \tag{37}$$

$$f_x = -\frac{1}{2p}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{8p} \qquad x \in [0,a] \tag{38}$$

2. Osnovni i kanonski oblik jednačine krive voda u kosom rasponu

$$y_v = \frac{1}{2p}x^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a} - \frac{a}{2p}\right)x + h_1 \qquad x \in [0,a] \tag{39}$$

$$y_v = \frac{1}{2p}\left\{x - \frac{a}{2}\left[1 - \frac{2p}{a^2}(h_2 - h_1)\right]\right\}^2 + h_1 - \frac{1}{2p}\left\{\frac{a}{2}\left[1 - \frac{2p}{a^2}(h_2 - h_1)\right]\right\}^2 \qquad x \in [0,a] \tag{40}$$

3. Osnovni i kanonski oblik jednačine krive voda u ravnom rasponu

$$y_v = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{a}{2p}x + h \qquad x \in [0,a] \tag{41}$$

$$y_v = \frac{1}{2p}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h - \frac{a^2}{8p} \qquad x \in [0,a] \tag{42}$$

JEDNAČINA KRIVE VODA U ZAVISNOSTI OD KOORDINATA TEMENA PARABOLE

Ako znamo koordinate temena parabole onda možemo napisati jednačinu krive voda u zavisnosti od x_{MIN}, y_{MIN}, h_1 i x, tj. $y_v = y(x_{MIN}, y_{MIN}, h_1, x)$. Osnovni oblik ove jednačine je (43), a kanonski oblik (44).

$$y_v = \frac{h_1 - y_{MIN}}{x_{MIN}^{\ 2}}x^2 - \frac{2(h_1 - y_{MIN})}{x_{MIN}}x + h_1 \qquad x \in [0,a] \tag{43}$$

$$y_v = \frac{h_1 - y_{MIN}}{x_{MIN}^{\ 2}}(x - x_{MIN})^2 + y_{MIN} \qquad x \in [0,a] \tag{44}$$

Uvrštavanjem $x_{MIN}=a/2$, $h_1=h$ i $y_{MIN}=h-f$ u (43) i (44) dobijamo jednačine za ravni raspon (21) i (35). Kombinovanjem jednačina (29) i (43) možemo napisati jednačinu $y_v = y(x_{MIN}, a, f, h_1, x)$. Osnovni oblik ove jednačine je (45), a njen kanonski oblik je (46).

$$y_v = \frac{4f}{a^2}x^2 - \frac{8x_{MIN}f}{a^2}x + h_1 \qquad x \in [0,a] \tag{45}$$

$$y_v = \frac{4f}{a^2}(x - x_{MIN})^2 + h_1 - \frac{4f}{a^2}x_{MIN}^{\ 2} \qquad x \in [0,a] \tag{46}$$

Na osnovu jednačina (44) i (46) matematička veza između y_{MIN} i x_{MIN} je izraz (47).

$$y_{MIN} = h_1 - \frac{4f}{a^2}x_{MIN}^{\ 2} \tag{47}$$

KONKRETNA PRIMENA JEDNAČINE KRIVE VODA

Za crtanje krive voda ili za određivanje visine voda u bilo kojoj tački raspona u odnosu na x-osu jednako se može koristiti bilo koja od prikazanih jednačina za krivu voda. Izbor jednačine zavisi od vrste raspoloživih ulaznih podataka i vrste zadatka. Inače svaka od jednačina ima svoju specifičnu primenu. Npr. jednačina (17) je edukativnog karaktera, jer iz nje se jasno vidi da je jednačina voda ustvari razlika jednačine spojnice i jednačine ugiba. Jednačina (19) je najpogodnija za određivanje prve i druge derivacije, npr. u cilju matematičkog određivanja stacionarne tačke krive voda, tj. minimuma. Jednačina (34) je pogodna za premeštanje krive voda unutar koordinatnog sistema, npr. u cilju izrade novih algoritama. Jedan takav konkretan primer je jednačina (48) za izračunavanje dužine voda u kosom rasponu na osnovu poznatog najvećeg ugiba parabole. Trenutno u stručnoj literaturi nalazimo samo formulu (49) za dužinu voda u ravnom rasponu [2], te se ista koristi i za kose raspone bez obzira što njena upotreba u kosom rasponu prouzrokuje znatne greške u proračunu. Pri izradi (48) prvo je određeno teme parabole pomoću (35), a zatim je parabola premeštena u x-y koordinatnom sistemu tako da njeno teme bude u koordinatnom početku. Posle toga je pomoću integralnog računa matematički određena formula za dužinu krive voda. Formula (48) je univerzalna, s obzirom da se odnosi i na kosi i na ravni raspon. Ulazni podaci za proračun su a, f i x_{MIN}. (U slučaju ravnog raspona $x_{MIN}=a/2$.) Za određivanje f potrebno je prethodno uraditi mehanički proračun voda.

$$L = \frac{a^2}{16f}\left[arsh\frac{8f}{a^2}(a - x_{MIN}) + arsh\frac{8f}{a^2}x_{MIN} + \right.$$
$$\left. + \frac{8f}{a^2}(a - x_{MIN})\sqrt{1+\left(\frac{8f}{a^2}\right)^2 (a - x_{MIN})^2} + \frac{8f}{a^2}x_{MIN}\sqrt{1+\left(\frac{8f}{a^2}x_{MIN}\right)^2}\right] \tag{48}$$

$$L = a + \frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{a} \tag{49}$$

ZAKLJUČAK

U radu je prikazano čak devet različitih verzija jednačine krive voda u kosom rasponu prema modelu parabole. Nasuprot tome jednačina krive voda prema modelu lančanice ima samo dve verzije. Proračun parabole je znatno jednostavniji u odnosu na proračun lančanice, a osim toga pruža nam mnogo više mogućnosti i varijacija u samom proračunu što se vrlo lako može iskoristiti pri rešavanju standardnih, ali i vrlo specifičnih zadataka u praksi. Zbog svega toga je primena parabole pri projektovanju nadzemnih vodova vrlo česta u situacijama kada odstupanje između lančanice i parabole ne prelazi dozvoljenu granicu. Inače matematički proračuni parabole i lačanice se znatno razlikuju jedan od drugog. Na osnovu najvećeg ugiba parabole f, te a, h_1 i h_2 možemo odrediti jednačinu parabole, a onda na osnovu nje koordinate temena parabole. U slučaju lančanice je drugačije, kao neophodan podatak za matematičko određivanje jednačine lančanice u kosom rasponu ne koristimo najveći ugib voda f, nego parametar lančanice c. Prvo treba odrediti koordinate temena lančanice, a onda na osnovu formule (7) možemo napisati konkretnu jednačinu za lančanicu.

LITERATURA

[1] Hatibovics A., 2011, ”Usage of Parabola Calculation for Planning of Electrical Overhead Network”, ENELKO konferencija, Kolozsvár
[2] Perneczky G., 1968, ”Szabadvezetékek feszítése”, Műszaki Könyvkiadó Budapest
[3] Đurišić Ž. i Vlajinac-Deletić K., 2009, ”Elementi elektroenergetskih sistema”, Univerzitet u Beogradu Elektrotehnički fakultet
[4] ***, 2007, ”Sag-tension calculation methods for overhead lines”, CIGRÉ Publication 324
[5] Obádovics G., 2010, ”Lineáris Algebra”, SCOLAR Budapest
[6] Gustafson D, Frisk P. i Hughes J., 2010, ”College Algebra”, CENGAGE Learning
[7] Hatibovics A., 2011, ”Determination of the Lowest Point of Conductor” MEE 58. Vándorgyűlés konferencija, Szeged